**ПРОГРАММА-МИНИМУМ**

кандидатского экзамена по специальности

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы

программ

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: математический и функциональный анализ, высшая алгебра, методы математической физики, теория вероятностей, математическая статистика, вычислительные методы, математическое моделирование, моделирование сложных систем, пакеты прикладных программ, практикум по численным методам, проектирование и разработка интеллектуальных информационных систем, а также программы соответствующих курсов лекций, читаемых в Институте математики, информационных технологий и физики УдГУ.

**Перечень разделов и тем для подготовки к кандидатскому экзамену**

**БАЗОВАЯ ПРОГРАММА**

**1. Математические основы**

*Элементы теории функций и функционального анализа.*  Понятие меры и интеграла Лебега. Метрические и нормированные пространства. Пространства интегрируемых функций.Пространства Соболева. Линейные непрерывные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Линейные операторы. Элементы спектральной теории. Дифференциальные и интегральные операторы.

*Экстремальные задачи. Выпуклый анализ.* Экстремальные задачи в евклидовых пространствах. Выпуклые задачи на минимум. Математическое программирование, линейное программирование, выпуклое программирование. Задачи на минимакс. Основы вариационного исчисления. Задачи оптимального управления. Принцип максимума. Принцип динамического программирования.

*Теория вероятностей. Математическая статистика.* Аксиоматика теории вероятностей. Вероятность, условная вероятность. Независимость. Случайные величины и векторы. Элементы корреляционной теории случайных векторов. Элементы теории случайных процессов. Точечное и интервальное оценивание параметров распределения. Элементы теории проверки статистических гипотез. Элементы многомерного статистического анализа. Основные понятия теории статистических решений. Основы теории информации.

**2. Информационные технологии**

*Принятие решений.* Общая проблема решения. Функция потерь. Байесовский и минимаксный подходы. Метод последовательного принятия решения.

*Исследование операций и задачи искусственного интеллекта.* Экспертизы и неформальные процедуры. Автоматизация проектирования. Искусственный

интеллект. Распознавание образов.

**3. Компьютерные технологии**

*Численные методы.* Интерполяция и аппроксимация функциональных зависимостей. Численное дифференцирование и интегрирование. Численные методы поиска экстремума. Вычислительные методы линейной алгебры. Численные методы решения систем дифференциальных уравнений. Сплайн-аппроксимация, интерполяция, метод конечных элементов. Преобразования Фурье, Лапласа, Хаара и др. Численные методы вейвлет-анализа.

*Вычислительный эксперимент.* Принципы проведения вычислительного эксперимента. Модель, алгоритм, программа.

*Алгоритмические языки.* Представление о языках программирования высокого уровня. Пакеты прикладных программ

4**. Методы математического моделирования**

*Основные принципы математического моделирования*. Элементарные математические модели в механике, гидродинамике, электродинамике. Универсальность математических моделей. Методы построения математических моделей на основе фундаментальных законов природы. Вариационные принципы построения математических моделей.

*Методы исследования математических моделей.* Устойчивость. Проверка адекватности математических моделей.

*Математические модели в научных исследованиях*. Математические модели в статистической механике, экономике, биологии. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем.

*Задачи редукции к идеальному прибору.* Синтез выходного сигнала идеального прибора. Проверка адекватности модели измерения и адекватности результатов редукции. *Модели динамических систем.* Особые точки. Бифуркации. Динамический хаос. Эргодичность и перемешивание. Понятие о самоорганизации. Диссипативные структуры. Режимы с обострением.

**Основная литература**

1. Ильин, Владимир Александрович Математический анализ [Текст] : учебник : [по специальностям "Математика", "Прикладная математика" и "Информатика"] : в 2 ч. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов ; под ред. А. Н. Тихонова ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - 3-е изд., перераб.Ч. 1. - 2007. - 660 с. -ISBN 978-5-482-01426-4.

2. Бахвалов, Николай Сергеевич. Численные методы [Текст] : [учеб. пособие для физ.-мат. специальностей вузов] / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - 5-е изд. - М. : Бином. Лаб. Знаний , 2007. - 636 с. - (Классический университетский учебник / ред. совет: В. А. Садовничий (пред.) и др.). - ISBN 5-94774-620-4 .

3. Маклаков, Сергей Владимирович. Создание информационных систем с AllFusion Modeling Suite [Текст] / С.В.Маклаков. – Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Диалог-МИФИ, 2007. -396 с.

4. Советов Б.Я. Моделирование систем [Текст] : [учеб. для вузов по направлениям "Информатика и вычисл. техника" и "Информ. системы"] / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. - Изд. 5-е, стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 343 с.

**Дополнительная литература**

1. Гмурман, Владимир Ефимович. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. - 12-е изд., перераб. - М. : Высш. образование, 2007. - 479 с. - (Основы наук). - ISBN 978-5-9692-0150-7 .

.2. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций [Текст] : учеб. пособие / [Б. Г. Володин и др.] ; под общ. Ред. А. А. Свешникова. - Изд. 4-е, стер. - СПб. [и др.] : Лань, 2008. - 445 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература) (Классическая учебная литература по математике) (Классические задачники и практикумы). - ISBN 978-5-8114-0708-8.

3. Сборник задач по высшей математике [Текст] : с контрол. работами : 2 курс / К. Н. Лунгу, В. П. Норин, Д. Т. Письменный, Ю. А. Шевченко ; под ред. С. Н. Федина. - М. : Айрис-пресс, 2004. - 590 с. - (Высшее образование). - ISBN 5-8112-0442-6 .

4. Письменный, Дмитрий Трофимович. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам [Текст] / Дмитрий Письменный. - 2-е изд. - М. : Айрис Пресс, 2007. - 287 с. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-2707-5.

5. Волков, Евгений Алексеевич. Численные методы [Текст] : учеб. пособие / Е. А. Волков. - Изд. 4-е, стер. - СПб. [и др.] : Лань, 2007. - 248 с. - ISBN 978-5-8114-0538-1.

6. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Ортогональные модели корреляционно- спектральных характеристик случайных процессов. Лабораторный практикум/ СНЦ РАН, 2008. 301 с., ил.

7. Вентцель, Елена Сергеевна. Теория вероятностей и ее инженерные приложения [Текст] : [учеб. пособие для втузов] / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. - Изд. 4-е, стер. - М. : Высш. шк., 2007. -491 с. - (Для высших учебных заведений. Математика). - ISBN 978-5-06-005714-0.

**ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА**

**1.Математические модели.**

*Понятие математической модели.* Примеры моделей. Адекватность моделей. Подо­бие и верификация моделей.

*Краевые задачи, описывающие напряженно-деформированное состояние.* Краевые условия, их физический смысл. Поверхностные и объёмные источники нагрузки. Начально-краевые задачи, описывающие динамическое деформирование. Нелинейные задачи теории упругости. Гиперупругость.

*Математические модели, описывающие течения жидкости и газа.* Уравнения На- вье-Стокса. Понятие ламинарного и турбулентного течений.

*Применение интегральных уравнений для математического моделирования раз­личных физических процессов.*

**2. Численные методы линейной алгебры**

*Нормы векторов и согласованные с ними нормы матрицы.* Число обусловленности невырожденной матрицы. Число обусловленности симметричной положительно определенной матрицы. Погрешность решения СЛАУ. Оценка относительной по­грешности решения СЛАУ через ее невязку и число обусловленности.

*Итерационные методы решения СЛАУ, их характерные признаки.* Метод Якоби (метод простой итерации). Условия сходимости метода Якоби. Метод Гаусса- Зейделя. Метод релаксации. Метод блочной релаксации. Итерационные методы, основанные па минимизации функционала.

*Прямые методы решения СЛАУ, их характерные признаки.* Метод Гаусса. Выбор главного элемента в методе Гаусса. Компактная схема метода Гаусса (LU- разложение), ее преимущество при решении многих СЛАУ с одной матрицей и различными правыми частями. Метод прогонки для решения СЛАУ с трехдиагональными матрицами. Метод Холесского (метод квадратного корня) для решения СЛАУ с симметричными матрицами.

*Метод сопряженных градиентов, его особенности.* Предобуславливание в методе сопряженных градиентов. Предобуславливание, основанное на неполном разложе­нии Холесского.

**3. Интерполяция, численное интегрирование функций и систем обык­новенных дифференциальных уравнений, решение нелинейных урав­нений и систем нелинейных уравнений**

*Интерполяционный многочлен Лагранжа.* Интерполяция с использованием сплай­нов. Одномерный кубический сплайн с непрерывной первой и второй производны­ми. Кусочно-кубическая интерполяция со сглаживанием.

*Численное интегрирование одномерных функций.* Квадратурные формулы прямо­угольников, трапеций, парабол (Симпсона). Основные принципы построения квад­ратурных формул Гаусса. Правило Рунге практической оценки погрешности чис­ленного интегрирования. Уточнение приближенного решения по Ричардсону.

*Интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений.* Метод Эйлера, метод прогноза и коррекции, методы Рунге-Кутта и мето­ды Адамса различных порядков. Преимущества и недостатки методов Рунге-Кутта и Адамса одинаковых порядков. Применение правила Рунге для оценки погрешно- сти приближенного решения. Уточнение решения по Ричардсону. Проблема жест­кости систем обыкновенных дифференциальных уравнений и возможные пути ее решения.

*Методы решения нелинейных уравнений.* Методы простой итерации, половинного деления, секущих, хорд и Ньютона реше­ния нелинейных уравнений. Квадратичная сходимость метода Ньютона. Метод Ньютона для решения систем нелинейных уравнений.

**4. Численные методы решения задач математической физики.**

*Принципы аппроксимации краевых задач на прямоугольных сетках с использова­нием метода конечных разностей.* Понятие разностной схемы. Аппроксимация, ус­тойчивость и сходимость разностной схемы, их взаимосвязь. Явные и неявные схемы аппроксимации начально-краевых задач. Условия устой­чивости явных схем при решении начально-краевых задач для уравнений парабо­лического и гиперболического типа.

*Численные методы решения задач математической физики, основанные на аппрок­симации балансных соотношений (метод конечных объёмов).* Использование вариационных и проекционных методов при решении краевых за­дач для дифференциальных уравнений в частных производных. Методы Ритца, Галеркина. коллокаций, наименьших квадратов. Понятия базисных и тестовых функ­ций в этих методах.

*Метод конечных элементов (МКЭ).* Выбор базиса МКЭ. Финитные функции. Сборка из локальных матриц. Конечномерные пространства. Энергетическая нор­ма. Оценка погрешности решения в МКЭ. Повышение порядка аппроксимации в МКЭ. Квадратичный базис. Кубический ба­зис. Точность и вычислительные затраты. Одномерные лагранжевы и эрмитовы элементы, структуры конечно-элементных матриц. Двумерные конечные элементы. Билинейные и лагранжевы элементы. Нумерация узлов, сборка глобальной матрицы, её структура. Конечные элементы на симплексах, L-координаты, их использование при вычисле­нии интегралов. Конечные элементы на несогласованных сетках. Трёхмерные задачи. Конечные элементы на тетраэдрах, призмах.

Особенности применения МКЭ для решения нелинейных задач. Применение метода Ньютона для решения нелинейных конечно-элементных систем уравнений.

*Проблема построения сеток.* Двумерные триангуляции. Триангуляция Делоне, ал­горитмы её построения. Достоинства и недостатки триангуляции Делоне и алго­ритмов её построения. Фронтальные алгоритмы построения сеток. Трёхмерные сетки. Способы описания двумерной и трёхмерной геометрии расчётной области.

*Структуры данных метода конечных элементов.* Хранение информации о сетке, краевых условиях. Учёт условий симметрии задачи. Структура конечноэлементных пакетов. Препроцессоры и постпроцессоры.

**5. Элементы программирования при реализации численных методов.**

*Модульное и объектно-ориентированное программирование.* Основные отличия языков модульного и объектно-ориентированного программирования. Программная реализация хранения матриц в ленточном, профильном и разреженном строчном форматах. Портрет матрицы, алгоритмы его построения.

*Параллельные вычисления. Ускорение и эффективность параллельных вычислений. Закон Амдаля. Модель Roofline. Понятие параллельных и распределенных вычислений.* Проектирование параллельных алгоритмов. Распараллеливание циклов.

**6. Операционные системы и комплексы программ.**

*Операционные системы: назначение, выполняемые функции.* Современные и пер­спективные операционные системы.

*Комплексы прикладных программ.* Формы построения комплексов прикладных программ: библиотека, пакет прикладных программ (ППП), диалоговая система. *Программные комплексы для решения задач математической физики.* Структура программного комплекса. Требования к пре- и постпроцессорам. Способы и сред­ства задания исходных данных и визуализации результатов.

**Список литературы**

**Основной список**

1. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения : учебное пособие для вузов / В. М. Вержбицкий. - М.: ОНИКС 21 век , 2005. - 430 с.
2. Вычислительная линейная алгебра : учебное пособие для вузов / В. М. Вержбиц­кий,- М. : Высш. шк„ 2009. -351 с. 18ВЫ: 978-5-06-005829-1
3. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач : учеб, по­собие /Ю.Г. Соловейчик, М.Э. Рояк, М.Г. Персова.-Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. - 896 с.
4. Сагдеева, Ю. А.; Копысов, С. П.; Новиков, А. К. Введение в метод конечных элементов. Ижевск: Изд-во:Удмуртский университет. 2011. 44 с.
5. Масштабируемые вычисления для гетерогенных платформ : учеб. пособие / С. П. Копысов, И. М. Кузьмин, Н. С. Недожогин, М-во науки и высш. образования РФ, ФГБОУ ВО "Удмуртский государственный университет", Ин-т математики, информ. технологий и физики. - Ижевск : Удмуртский университет, 2020. - 269 с.
6. Методы декомпозиции: разделение расчетных сеток : учеб. пособие / С. П. Копысов, А. К. Новиков, М-во образования и науки РФ, ФГБОУ ВО "Удмуртский государственный университет", Ин-т математики, информ. технологий и физики, Каф. вычисл. механики. - Ижевск : Удмуртский университет, 2018. - 99 с.
7. Операционные системы. Параллельные и распределенные системы / Джин Бэкон, Тим Харрис ; [пер. с англ. О. Здир]. -Санкт-Петербург [и др.] : Питер , 2004. - 799 с.
8. Современные операционные системы / Э. Таненбаум ; [пер. с англ. Н. Вильчин- ский, А. Лашкевич]. - СПб. [и др.] : Питер, 2011. - 1115 с.

**Дополнительный список**

1. Голуб Дж.. Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. - М.: Мир, 1999. - 548 с.
2. Зенкевич О.. Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. - М.: Мир, 1986. - 318с.
3. Ильин В.П. Методы и технологии конечных элементов. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2007.
4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1989. - 608 с.
5. Митчел Э., Уэйт Р. Методы конечных элементов для уравнений с частными произ­водными. - М.: Мир, 1981. - 216 с.
6. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных сис­тем. - М.: Мир, 1991. - 367 с.
7. Сабоннадьер Ж.-К., Кулон Ж.-Л. Метод конечных элементов и САПР: Пер. с франц. - М.: Мир, 1989. - 190с.
8. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989. - 432с.- М.: Мир. 1986.-229 с.
9. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. - М.: Мир, 1981. - 408с.
10. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. - пер. с англ. - М.:

Мир. 1975. -536с.